
代数学

Algebra

SERGE LANG

译者说明

本文件是一份排版示例，正文选取群论中最基本的一段内容，用来展示术语、定理环境、交叉引用、长证明、习题与术语索引等功能。正式翻译时，可以在这里说明所依据的原书版次、翻译与重排原则、模型的使用方式，以及与原书章节、公式或页码之间需要保留的对应关系。

数译

17 Aug 2026

目录

译者说明	i
第 1 章 群与同态	1
1.1 子群与正规子群	1
1.2 商群与群同态	1
附录 A 参考答案	4
参考文献	5
术语索引	6

群与同态

1.1 子群与正规子群

设 G 是一个群. 我们常常希望从 G 中取出一部分元素, 并要求它们在原来的运算下仍然组成一个群.

定义 1.1.1: 若非空子集 $H \subseteq G$ 在 G 的运算下本身构成一个群, 则称 H 为 G 的子群 (subgroup), 记作 $H \leq G$.

判断一个非空子集是不是子群时, 并不需要逐条检查所有群公理.

引理 1.1.1: 设 H 是 G 的非空子集. 若对任意 $x, y \in H$ 都有 $xy^{-1} \in H$, 则 $H \leq G$.

证明: 取 $x \in H$. 令 $y = x$, 则 $e = xx^{-1} \in H$. 再令 $x = e$, 可得 $y^{-1} \in H$. 最后, 对任意 $x, y \in H$, 由于 $y^{-1} \in H$, 应用假设得到 $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. 因此 H 在乘法与取逆下封闭, 从而是 G 的子群. $\square$

有些子群与整个群的乘法结构特别相容, 这些子群正是构造商群所需要的对象.

定义 1.1.2: 若子群 $N \leq G$ 满足对任意 $g \in G$ 都有 $gNg^{-1} = N$, 则称 N 为 G 的正规子群 (normal subgroup), 记作 $N \trianglelefteq G$.

例 1.1.1: 若 G 是交换群, 则 G 的每个子群都是正规子群. 事实上, 对任意 $g \in G$ 与 $n \in N$, 都有 $gng^{-1} = n$. $\diamond$

注 1.1.1: 子群是否正规依赖于它嵌入整个群的方式. 同一个抽象群可以在某个群中作为正规子群出现, 也可以在另一个群中作为非正规子群出现. $\diamond$

习题

1.1.1. 证明任意群 G 的中心 $Z(G)$ 都是正规子群.

1.1.2. 设 $H, K \leq G$, 证明 $H \cap K \leq G$.

1.2 商群与群同态

正规子群允许我们把同一个陪集中的元素视为同一个对象.

定义 1.2.1: 若 $N \trianglelefteq G$, 则所有陪集

$$G/N = \{gN \mid g \in G\}$$

在乘法 $(gN)(hN) = ghN$ 下构成的群称为 商群 (quotient group).

接下来考虑两个群之间保持运算的映射.

定义 1.2.2: 设 G 与 H 是群. 若映射 $\varphi: G \rightarrow H$ 满足

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

对所有 $x, y \in G$ 都成立, 则称 φ 为 群同态 (group homomorphism) .

与一个群同态相伴的两个基本对象, 是被送到单位元的元素和真正被映到的元素.

定义 1.2.3: 群同态 $\varphi: G \rightarrow H$ 的 核 (kernel) 与 像 (image) 分别定义为

$$\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}, \quad \text{im } \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

命题 1.2.1: 对任意群同态 $\varphi: G \rightarrow H$, 都有 $\ker \varphi \trianglelefteq G$.

证明: 取 $x \in \ker \varphi$ 与 $g \in G$. 则

$$\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} = e_H.$$

因此 $gxg^{-1} \in \ker \varphi$, 所以 $\ker \varphi$ 是正规子群. □

核不仅记录同态把哪些元素压成了单位元, 它还精确描述了同态在定义域中丢失的信息.

定理 1.2.1: 设 $\varphi: G \rightarrow H$ 是群同态. 则存在自然同构

$$G/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

这个结论通常称为群的第一同构定理, 关于这一基本结果也可参见 [Lan02]. 它说明任何群同态都可以分解为先取商, 再把所得商群同构到像上. 完整证明放在本小节末、习题之前, 以展示较长证明的双向跳转方式.

[查看完整证明 \(第 3 页\)](#)

推论 1.2.1: 群同态 $\varphi: G \rightarrow H$ 是单射, 当且仅当 $\ker \varphi = \{e_G\}$.

证明: 由 [定理 1.2.1](#), 商群 $G/\ker \varphi$ 与 $\text{im } \varphi$ 同构. 因此 φ 不识别任何两个不同元素, 当且仅当核中只有单位元. □

第一同构定理也可以用交换图表示:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & \text{im } \varphi \\ \pi \downarrow & \nearrow \sim & \\ G/\ker \varphi & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \end{array}$$

其中 π 是自然投影, 而 $\bar{\varphi}$ 是定理给出的同构.

例 1.2.1: 考虑群同态

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad m \longmapsto \overline{m}.$$

它的核是 $n\mathbb{Z}$, 像是整个 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 因此 [定理 1.2.1](#) 给出

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \text{im } \varphi.$$

◇

问题 1.2.1: 设

$$\text{sgn}: S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

为符号同态. 求它的核, 并利用 [定理 1.2.1](#) 描述对应的商群.

证明 ([定理 1.2.1](#)): 由 [命题 1.2.1](#), $\ker \varphi \trianglelefteq G$, 所以商群 $G/\ker \varphi$ 有定义. 定义

$$\overline{\varphi}: G/\ker \varphi \longrightarrow \text{im } \varphi, \quad g \ker \varphi \longmapsto \varphi(g).$$

首先验证这个映射定义良好. 若

$$g \ker \varphi = h \ker \varphi,$$

则 $h^{-1}g \in \ker \varphi$, 从而

$$\varphi(h)^{-1}\varphi(g) = \varphi(h^{-1}g) = e_H.$$

因此 $\varphi(g) = \varphi(h)$, 所以 $\overline{\varphi}$ 与陪集代表元的选择无关.

其次, $\overline{\varphi}$ 是群同态, 因为

$$\overline{\varphi}((g \ker \varphi)(h \ker \varphi)) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

它显然是满射, 因为 $\text{im } \varphi$ 中的每个元素都具有形式 $\varphi(g)$.

最后验证单射. 若

$$\overline{\varphi}(g \ker \varphi) = e_H,$$

则 $\varphi(g) = e_H$, 故 $g \in \ker \varphi$. 于是 $g \ker \varphi = \ker \varphi$, 所以 $\overline{\varphi}$ 的核只有单位陪集.

因此 $\overline{\varphi}$ 是同构, 从而

$$G/\ker \varphi \cong \text{im } \varphi.$$

□

[返回原处](#)

习题

1.2.1. 设 $\varphi: G \rightarrow H$ 为群同态, 证明 $\text{im } \varphi \leq H$.

1.2.2. 设 $N \trianglelefteq G$, 证明自然投影 $G \rightarrow G/N$ 的核恰好是 N .

1.2.3. 设 $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ 为符号同态, 求它的核.

参考答案

1.1 子群与正规子群

1.1.1. 若 $z \in Z(G)$ 与 $g \in G$, 则 $gzg^{-1} = z \in Z(G)$. 因此 $Z(G) \trianglelefteq G$.

1.1.2. $H \cap K$ 非空, 因为 $e \in H \cap K$. 若 $x, y \in H \cap K$, 则 $xy^{-1} \in H$ 且 $xy^{-1} \in K$, 所以 $xy^{-1} \in H \cap K$. 由 [引理 1.1.1](#), $H \cap K \leq G$.

1.2 商群与群同态

1.2.1. 单位元属于像. 若 $a = \varphi(x)$ 与 $b = \varphi(y)$ 属于像, 则

$$ab^{-1} = \varphi(xy^{-1})$$

仍属于像. 由 [引理 1.1.1](#), $\text{im } \varphi \leq H$.

1.2.2. 自然投影把 $g \in G$ 送到陪集 gN . 有 $gN = N$ 当且仅当 $g \in N$, 因此它的核正是 N .

1.2.3. sgn 的核由所有偶置换组成, 也就是交错群 A_n .

参考文献

[Lan02] Serge Lang, *Algebra*, 3rd edition, Springer, 2002.

[DF04] David S. Dummit and Richard M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd edition, Wiley, 2004.

术语索引

中文术语	英文术语	页码
子群	subgroup	1
正规子群	normal subgroup	1
商群	quotient group	1
群同态	group homomorphism	2
核	kernel	2
像	image	2